Physique pour tous

Cours 5 : *Relativité Restreinte III*

Antoine Tilloy [*] [†]

Résumé

Notes [1] du troisième et dernier cours de relativité restreinte. On continue avec la géométrie de Minkowski et discute les changements de référentiels avant de conclure par un peu de dynamique.

1 Cinématique graphique

1.1 Changements de référentiel

Jusqu'à maintenant, nous avons tracé des diagrammes d'espace temps dans un référentiel donné. La définition de la notion de temps propre permet bien d'avoir quelques intuitions générales, mais il nous manque la notion de changement de référentiel. On aimerait avoir une représentation graphique des transformations de Lorentz. L'objectif de cette représentation est de voir les effets de dilatation du temps et de contraction des distances de manière directe et graphique, sans avoir à faire aucune manipulation algébrique. Tout peut évidemment se déduire de l'expression des transformations de Lorentz mais il est plus intéressant de redémontrer les résultats qui suivent directement de considérations géométriques.

Le cas classique

On considère un référentiel $\mathcal{R}$ (x, ct) et un référentiel $\mathcal{R}'$ (x', ct') en translation rectiligne uniforme à vitesse v par rapport à $\mathcal{R}$, typiquement un train en mouvement par rapport au quai. Pour simplifier on ne considère qu'une seule dimension d'espace. Avant de passer à la relativité, il faut se demander comment on décrirait une telle situation sur un dessin en mécanique classique. On peut décrire l'espace-temps dans le référentiel $\mathcal{R}$ «fixe» du quai de la manière usuelle avec deux axes perpendiculaires, i.e. un bête repère cartésien. Ensuite, dans le référentiel en mouvement $\mathcal{R}'$, celui du train, la manière dont on repère le temps est la même grâce au temps absolu de la mécanique classique. La position, elle, est différente car... le référentiel est en mouvement. Cela signifie que l'ensemble des points à un temps donné forment toujours des droites parallèles à l'horizontale mais qu'une position donnée, disons $x' = 0$ dans $\mathcal{R}'$ «avance» en x au cours du temps. À ce stade, un dessin est probablement plus pertinent que ces explications confuses et le lecteur doit se convaincre que l'on obtient bien la Fig. 1. L'angle α est tel que $\tan\alpha = v/c$.

Diagramme de Minkowski asymétrique

On a vu aux cours précédents que passer d'un référentiel à un autre en relativité restreinte entraînait des modifications plus profondes de l'espace-temps. En particulier on a vu que le temps ne coïncidait plus. Le même événement est repéré par un temps

[*] Laboratoire de Physique Théorique, École Normale Supérieure, Paris

[†] contact : `tilloy@lpt.ens.fr`; page : `www.phys.ens.fr/~tilloy`

1. Dernière modification : 18 novembre 2015

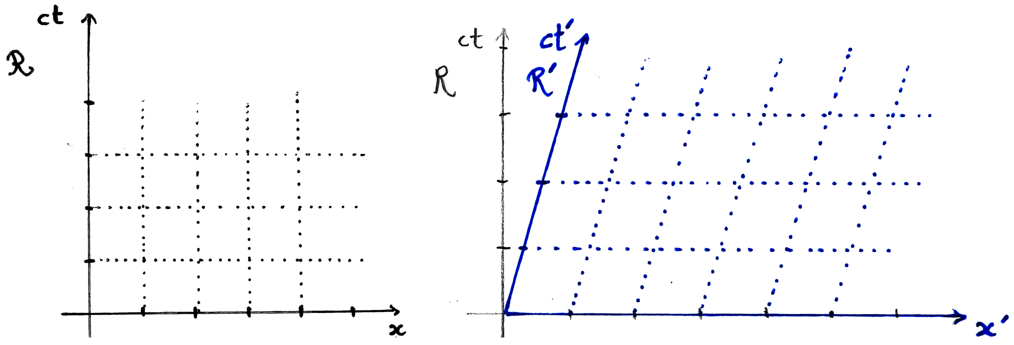

FIGURE 1 – Transformation du repère lors d'un changement de référentiel en physique classique. La seule modification vient de la rotation de l'axe du temps.

différent dans deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre. Dans le cas général, et de manière plus précise, il faut utiliser les transformations de Lorentz et non les transformations de Galilée pour passer d'un référentiel à un autre. L'expression mathématique de ces transformations n'offre pas forcément un excellent support à l'intuition et il serait souhaitable de pouvoir les écrire graphiquement, comme on peut le faire en physique classique.

Comme précédemment, on fait un dessin dans lequel le référentiel $\mathcal{R}$ a pour repère les axes usuels orthonormés du plan. Quelles modifications attend-t-on par rapport au cas précédent pour le repère représentant le référentiel $\mathcal{R}'$? À ce stade, le lecteur est invité à réfléchir un peu et à griffonner un petit dessin en lisant les lignes qui suivent. Comme dans le cas galiléen, on s'attend à ce que l'axe du temps du référentiel $\mathcal{R}'$ soit en biais traduisant ainsi la vitesse v de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. A priori, on ne voit pas pourquoi il devrait y avoir de modification sur l'angle α que fait l'axe des temps de $\mathcal{R}'$ avec celui de $\mathcal{R}$ puisque c'est simplement ce qui désigne ce que l'on entend par «vitesse», i.e. le fait que le point $x' = 0$ se déplace à v dans $\mathcal{R}$.

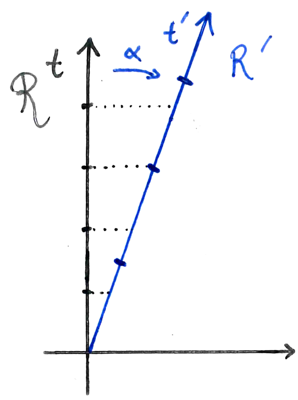

FIGURE 2 – L'axe du temps dans $\mathcal{R}'$ est «tordu» par rapport à l'axe des temps de $\mathcal{R}$ (effet purement classique attendu), mais il est aussi étiré (effet relativiste de dilatation du temps).

Une première différence à laquelle on peut penser concerne le temps. En effet, les temps dans les deux référentiels ne doivent plus coïncider. Si l'on considère un point sur l'axe des temps de $\mathcal{R}'$, i.e. un point en $x' = 0$ qui avance avec le train, on sait que le temps propre s'écoule plus lentement que le temps coordonnée dans $\mathcal{R}$. Une conséquence simple est l'axe t' des temps dans $\mathcal{R}'$ doit avoir des graduations plus espacées que celles de l'axe t des temps de $\mathcal{R}$ (voir Fig. 2).

L'axe des temps n'a pas les mêmes graduations dans les deux référentiels, y a-t-il d'autres modifications ? Souvenons nous que le cône de lumière doit être le même

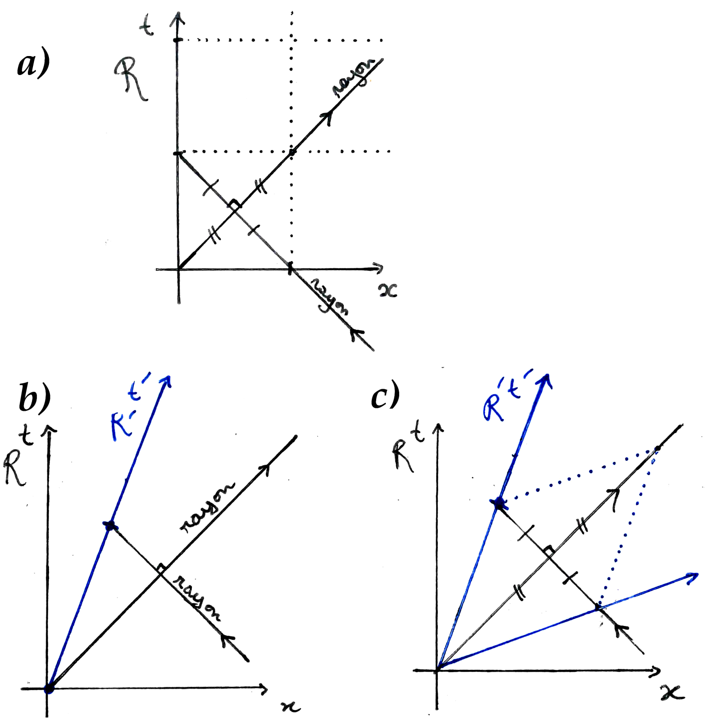

FIGURE 3 – **a)** Dans le référentiel $\mathcal{R}$ les rayons lumineux coïncident avec les diagonales d'un petit carré correspondant à une graduation d'espace et une de $c\times$temps. Cette propriété doit nécessairement être valable dans les autres référentiels. **b)** Pour imposer la condition précédente dans $\mathcal{R}'$ on regarde la trajectoire de deux rayons lumineux particuliers. **c)** La contrainte que ces deux rayons lumineux passent par les coins fixe entièrement la forme du losange, et donc finalement la représentation de $\mathcal{R}'$.

dans tous les référentiels («la lumière va à la même vitesse dans tous les référentiels»), cela va permettre de trouver l'axe x' des abscisses correspondant à la position dans $\mathcal{R}'$. Comme pour l'axe des temps, on a besoin de deux informations : l'angle qu'il fait avec l'horizontale et l'espacement entre les graduations. Pour cela, considérons deux rayons lumineux (voir Fig. 3). Un partant de $(0,0)$ et allant vers les x croissants et un arrivant à la première graduation de l'axe des temps dans $\mathcal{R}'$, i.e. de $(t'=1, x'=0)$ et *venant* des x décroissants. Ces deux rayons lumineux doivent aussi aller à la vitesse de la lumière dans $\mathcal{R}'$ ce qui signifie que l'axe des x' et ses graduations doivent être tels que ces deux rayons lumineux passent par des croisements du «maillage» de l'espace temps. Cette contrainte fixe entièrement la forme d'une cellule élémentaire (en losange) du réseau et on observe que l'axe des x' fait lui aussi un angle α avec l'horizontale. La forme d'une cellule élémentaire après un changement de référentiel en relativité restreinte est presque plus simple et symétrique que pour un changement de référentiel en mécanique classique car l'espace et le temps ont un rôle similaire. On dit en général que les transformations de Lorentz, i.e. les changements de référentiels, correspondent à des rotations d'espace-temps [2].

Ceux qui n'ont pas suivi cette construction peuvent se contenter d'essayer d'en comprendre le résultat en figure 4. Cette représentation est simple et parlante, elle a le défaut majeur que les graduations sur les axes des deux référentiels ne sont pas espacées de la même manière ce qui rend extrêmement difficile les comparaisons *précises* de distance et de temps entre les deux référentiels. En un coup d'oeil il est difficile de savoir, par exemple, si un objet en mouvement apparaît plus long ou plus court dans $\mathcal{R}'$ que dans $\mathcal{R}$.

2. En fait, les transformations de Lorentz sont réellement l'équivalent dans Minkowski des rotations de l'espace usuel quand le plan de la rotation contient une dimension de temps. On les appelle alors des «*boosts*» pour les distinguer des rotations usuelles de l'espace.

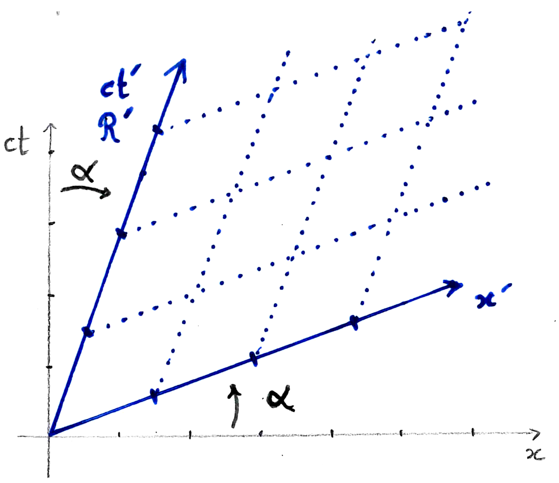

FIGURE 4 – Diagramme de Minkowski asymétrique.

Diagramme de Minkowski symétrique

La solution au problème précédent est d'utiliser un *diagramme de Minkowski symétrique*, c'est à dire de dessiner le référentiel $\mathcal{R}$ en translation à vitesse $-u/2$ par rapport à un repère central $\mathcal{R}_0$, et le référentiel $\mathcal{R}'$ en translation à vitesse $u/2$ par rapport à $\mathcal{R}_0$. Intuitivement, on aurait envie de dire que $u = v$ mais il faut se souvenir que les vitesses ne s'ajoutent pas [3]. On doit prendre u telle que la formule d'addition des vitesses fournisse la bonne vitesse v finale i.e. telle que :

$$v = \frac{2u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Dans le cas du train et du quai, cela revient à tout dessiner dans le référentiel dans lequel le train comme le quai s'éloignent à la même vitesse dans des directions opposées. Cette représentation, bien qu'à première vue légèrement plus compliquée que la précédente, a l'avantage de fournir *les mêmes graduations* sur les axes des repères des deux référentiels considérés. Par conséquent, il est possible de faire tous les passages d'un référentiel à l'autre géométriquement sans faire aucun calcul. Une fois bien maîtrisé, ce dernier type de diagrammes offre un excellent support à l'intuition et permet de comprendre de nombreux paradoxes. C'est celui que nous allons utiliser par la suite.

Contraction des distances

On peut proposer un exemple d'utilisation des diagrammes de Minkowski symétriques à l'étude de la contraction des distances. On considère un train de longueur d' lorsqu'il est au repos (on dit dans ce cas que d' est sa longueur propre). On suppose maintenant que le train se déplace à vitesse v par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ et on aimerait savoir quelle longueur il mesure dans $\mathcal{R}$, longueur mesurée avec la méthode décrite au cours précédent [4]. Il suffit pour cela d'utiliser un diagramme de Minkwoski symétrique (voir Fig. 6). Pour connaître la longueur du train dans $\mathcal{R}$, on commence par regarder le train à un temps identique dans $\mathcal{R}$, i.e. à regarder où se trouvent l'avant et l'arrière du train à un instant donné dans $\mathcal{R}$. Cette étape est non triviale dans la mesure où la notion de simultanéité dépend du référentiel. Une fois l'avant et l'arrière localisés à un instant donné, on les transporte sur l'axe des x parallèlement à l'axe des temps pour savoir quelle distance les sépare. On observe alors que d, la longueur du train dans $\mathcal{R}$ est *plus*

3. Si cela peut rassurer le lecteur, j'ai commencé par écrire v au lieu de u. L'intuition classique est si forte que même avec un peu d'habitude, on se surprend à faire toujours les mêmes erreurs.

4. Pour mesurer la longueur d'un objet en mouvement dans $\mathcal{R}$, on place devant lui une règle (au repos dans $\mathcal{R}$) et on lit la graduation atteinte par l'avant et celle atteinte par l'arrière *au même temps* dans $\mathcal{R}$. La longueur est alors la différence entre la plus grande et la plus petite des graduations.

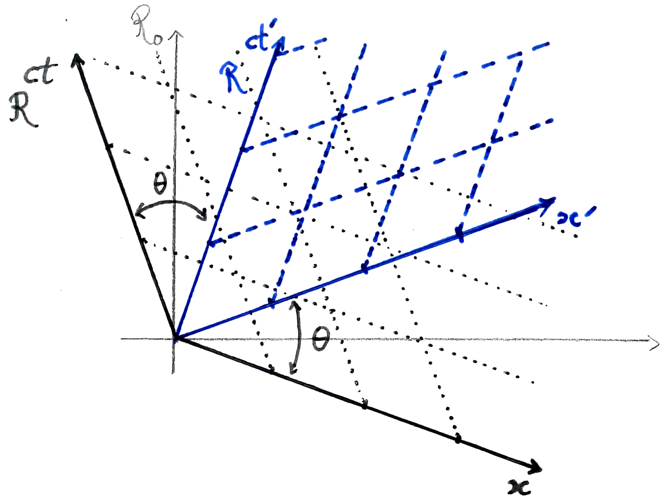

FIGURE 5 – Diagramme de Minkowski symétrique. L'angle θ est tel que $\sin\theta = \frac{v}{c}$

courte que la longueur d' du train dans $\mathcal{R}'$. Sachant que cette dernière est sa longueur au repos, sa longueur propre, celle dont on aurait envie de dire qu'il s'agit de sa longueur «réelle», on voit que de manière générique les objets en mouvement apparaissent toujours contractés : c'est le phénomène de contraction des distances. Le facteur de contraction peut être calculé avec les transformations de Lorentz ou avec un petit raisonnement géométrique directement sur la figure 6. Comme on le voit assez bien sur le dessin, l'effet vient en grande partie du fait que l'objet «train» considéré dans son ensemble à un temps donné n'est pas le même dans les deux référentiels à cause de l'absence de notion globale de synchronisation.

Remarque. La contraction des distances *n'est pas* un effet d'optique qui viendrait du fait que la lumière met un certain temps à nous parvenir à cause de sa vitesse de propagation finie. Encore une fois il faut bien garder à l'esprit la définition précise de distance que l'on a donnée, qui utilise la notion de synchronisation dans un référentiel et n'est pas directement liée à l'observation. La question de savoir ce que l'on «voit» *vraiment*, à l'oeil nu, lorsque l'on observe un objet en mouvement est en fait plus difficile. À l'effet de contraction relativiste s'ajoute l'aberration due au fait que les rayons lumineux issus de l'objet mettent un certain temps à nous atteindre. On présente parfois la contraction des distances en tenant compte de cette aberration mais cela a tendance à renforcer l'impression erronée que la contraction des distances est un phénomène optique. Dans certaines situations symétriques, les aberrations optiques n'ont pas d'impact sur ce que l'on voit et la contraction des distances est effectivement observable (un mini exercice à la fin de ces notes propose de réfléchir à cette question).

1.2 Le train et le tunnel

Le phénomène de contraction des distances se manifeste de manière particulièrement impressionnante dans l'exemple du train et du tunnel [5]. On considère un train d'une longueur au repos l_{train}, et un tunnel d'une longueur au repos [6] l_{tunnel}. Le train est plus long (au sens usuel) que le tunnel, i.e. $l_{train} > l_{tunnel}$. Si le train va suffisamment vite, sa longueur dans le référentiel du tunnel va réduire et le train va finir par y devenir plus court que le tunnel. On lance alors le train à cette vitesse dans le tunnel. Une fois que le train est entièrement dedans, on ferme l'entrée et la sortie du tunnel pour un bref

5. On appelle aussi parfois cet exemple le paradoxe de l'échelle et du garage ou en anglais "the barn and the pole".

6. Pour un tunnel, la précision peut sembler un peu ridicule et on a du mal à imaginer autre chose que sa longueur au repos : on voit rarement des tunnels se balader.

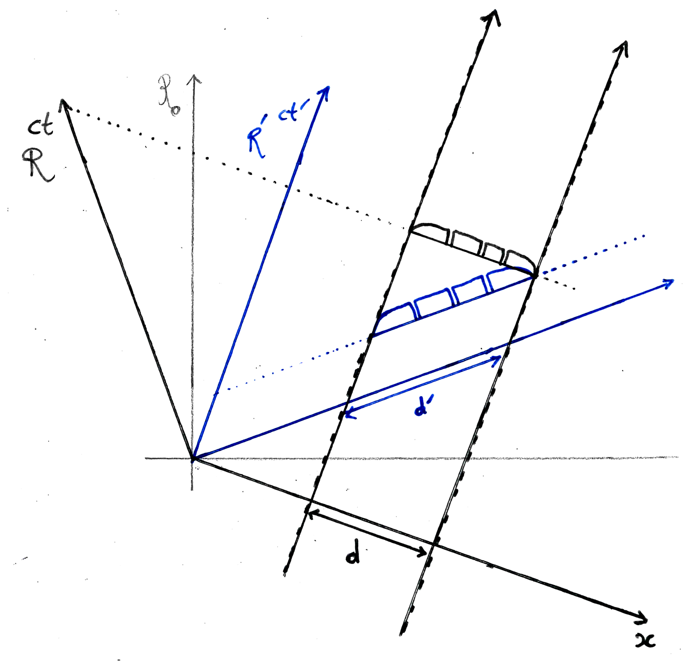

FIGURE 6 – Illustration de la contraction des distances. Le train apparaît plus court dans le référentiel $\mathcal{R}$ où il est en mouvement que dans le référentiel $\mathcal{R}'$ où il est au repos.

instant (histoire de valider le fait que le train est bien intégralement dans le tunnel en même temps). Puis on ré-ouvre la sortie et on voit le train sortir du tunnel, sans une égratignure (voir la partie gauche de Fig. 7).

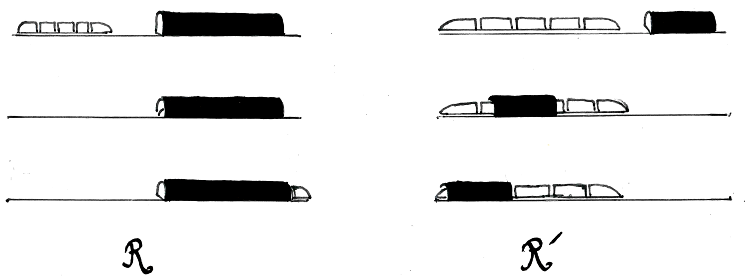

FIGURE 7 – Traversée du tunnel par le train vue dans le référentiel de tunnel à gauche et dans le référentiel du tunnel à droite.

Dans le référentiel du train, le tunnel est en mouvement et apparaît donc contracté, c'est à dire encore plus court ! Dans le référentiel du train, il est donc encore plus impossible de faire rentrer entièrement le train dans le tunnel car $l_{train} \gg l_{tunnel}$ (voir la partie droite de Fig. 7). Comment le train peut-il rentrer dans le tunnel intégralement, le tunnel étant fermé des deux côtés, dans un référentiel, et être beaucoup plus long que le tunnel dans un autre ?

Comme il y a énormément de confusion autour des paradoxes en relativité restreinte, je préfère vendre la mèche immédiatement. Le raisonnement dans le référentiel du tunnel est valable, la situation décrite est effectivement possible (en tout cas théoriquement), il n'y a aucune faille ou erreur dans ce qui est décrit. Le raisonnement dans le référentiel du train est aussi valable, le tunnel apparaît bien trop petit et, dans ce référentiel, le train n'est jamais entièrement dans le tunnel. En fait, ces deux situations sont tout à fait compatibles ! Pour s'en convaincre et pour mieux comprendre ce qui se passe, on peut dessiner la situation sur un diagramme de Minkowski symétrique (voir Fig. 8).

Sur le dessin, on a bien $l_{train} > l_{tunnel}$ dans les référentiels au repos. On observe qu'à

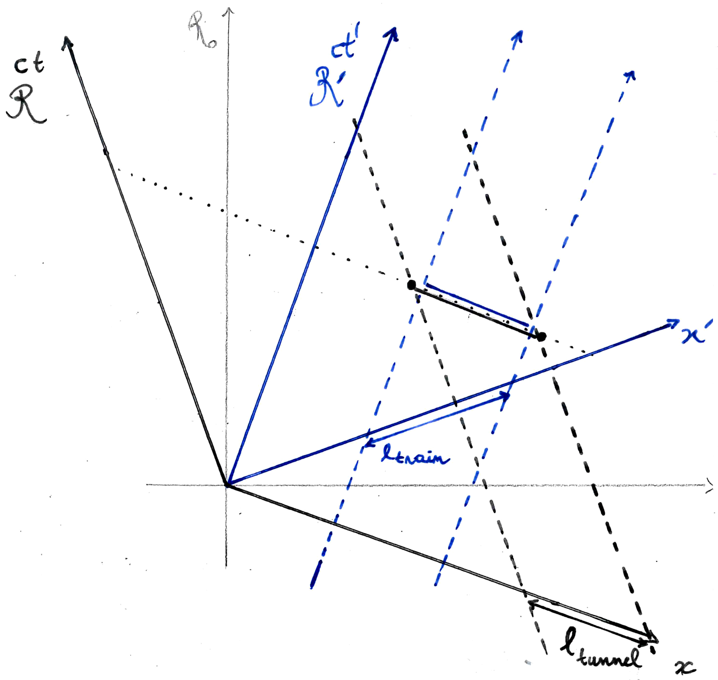

FIGURE 8 – Diagramme de Minkowski symétrique du train et du tunnel. Les lignes en tirets représentent les lignes d'univers de l'avant et de l'arrière du train et de l'entrée et sortie du tunnel.

un certain instant dans $\mathcal{R}$ le train rentre effectivement entièrement dans le tunnel ; il est donc possible de fermer entrée et sortie du tunnel à cet instant. À aucun moment en revanche le train ne se trouve entièrement dans le tunnel dans $\mathcal{R}'$. Que voit donc une personne dans le train ? Le dessin fournit la réponse, les événements «l'entrée se ferme» et «la sortie se ferme» ne sont pas synchronisés ! Le dessin montre que, dans le train, on voit d'abord la porte de sortie se fermer, puis on la voit s'ouvrir et le nez du train sort du tunnel, puis, une fois que l'arrière du train est entrée dans le tunnel, on voit la porte d'entrée du tunnel se fermer puis se réouvrir un peu après. Dans le référentiel du train, le train n'est effectivement jamais entièrement dans le tunnel. Cela n'est pas en contradiction avec le fait que dans le référentiel du tunnel, le train a été entièrement enfermé à l'intérieur du tunnel pendant un instant.

1.3 Le paradoxe des jumeaux

Au précédent cours de relativité restreinte, on a parlé du paradoxe des jumeaux, en donnant sa résolution mais sans regarder en détails où le raisonnement menant au paradoxe était faux. Rappelons le paradoxe. On a deux jumeaux, un sur Terre et un qui fait un aller retour vers une étoile lointaine dans un vaisseau ultra rapide. Du point de vue du jumeau resté sur Terre, le temps se ralentit pour le jumeau dans le vaisseau, le jumeau resté sur Terre s'attend donc à ce que son frère revienne plus jeune que lui à cause de la dilatation du temps. C'est effectivement ce qui se produirait. Néanmoins, la situation semble symétrique : du point de vue du voyageur la Terre s'éloigne puis se rapproche. Certes le référentiel du voyageur n'est pas globalement galiléen, mais il est constitué de deux référentiels galiléens successifs, celui qui suit le vaisseau à l'aller et celui qui suit le vaisseau au retour. Dans le premier référentiel, le voyageur dans le vaisseau voit que le temps s'écoule plus lentement sur Terre, puis au retour, il voit toujours que le temps s'écoule plus lentement sur Terre. Pourtant à la fin, beaucoup plus de temps s'est écoulé sur Terre. Comment cela est-il possible ?

Comme précédemment, un bon moyen de comprendre immédiatement ce qui est passe

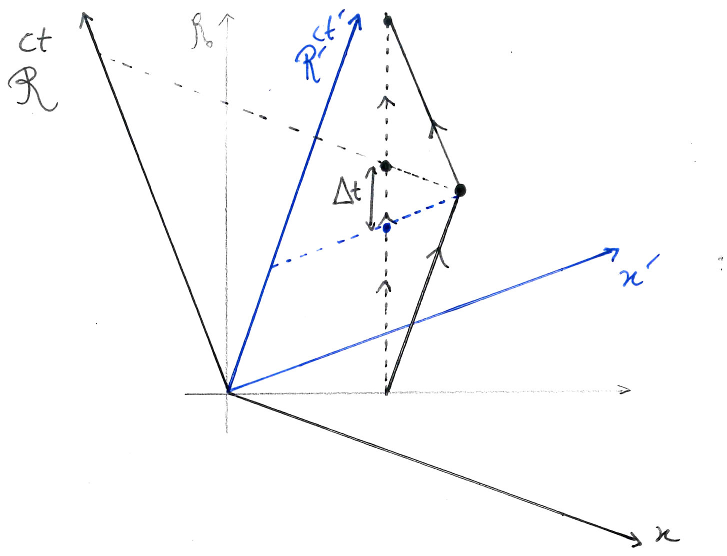

FIGURE 9 – Diagramme de Minkowski de la situation des jumeaux. La ligne épaisse représente la ligne d'univers du vaisseau et la ligne en tirets la ligne d'univers du jumeau resté sur Terre. Le référentiel $\mathcal{R}_0$ est celui de la Terre, $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}$ sont ceux du vaisseau à l'aller et au retour.

est de dessiner un diagramme de Minkowski symétrique correspondant à la situation considérée. Attention, on va cette fois-ci devoir considérer trois référentiels : le référentiel du vaisseau à l'aller $\mathcal{R}'$, le référentiel du vaisseau au retour $\mathcal{R}$ qui avance en sens contraire et le référentiel $\mathcal{R}_0$ de la Terre qui est en quelque sorte entre les deux (voir Fig. 9). Regardons combien de temps s'est écoulé sur Terre du point de vue du vaisseau à l'aller juste avant qu'il ne reparte en arrière (c'est à dire en temps coordonnée dans le référentiel $\mathcal{R}'$). Un instant plus tard, le vaisseau a changé de référentiel et le temps qui s'est écoulé sur Terre dans son référentiel a changé et est séparé du précédent par un écart Δ_t ! À l'instant où le vaisseau se retourne, on change de référentiel, on perd la notion de synchronisation, et le temps sur Terre possède une discontinuité [7]. Dans le vaisseau on a l'impression que le temps sur Terre s'écoule plus lentement et toute la vieillesse additionnelle du frère sur Terre est accumulée, encore une fois du point de vue du vaisseau, au moment du changement de sens.

Comme il y a énormément de malentendus sur ce paradoxe, je pense qu'il est bon d'insister une nouvelle fois sur le résultat. Le jumeau qui a voyagé revient bel et bien plus jeune comme le montre le calcul de son temps propre dans le référentiel de la Terre. Cet effet est mesurable bien que très faible pour des vitesses techniquement réalistes. Le paradoxe est dans l'impression que l'on a de la symétrie de la situation qui laisse penser que le même raisonnement est valable du point de vue du voyageur. Une réponse courante et erronée est de dire que la solution vient de la relativité générale ou qu'il faut inclure explicitement l'accélération du voyageur dans l'analyse. En un sens, le deuxième point contient une part de vérité mais il n'est pas nécessaire car même sans régulariser la trajectoire du voyageur avec une accélération bornée, il est tout à fait possible de se rendre compte de ce qui se passe en faisant uniquement de la cinématique simple (avec des vitesses constantes par morceau) en relativité restreinte.

7. Pour une accélération finie, i.e. si le vaisseau se retourne seulement progressivement, il n'y a pas de discontinuité mais simplement un écoulement incroyablement rapide du temps sur Terre au moment du retournement.

2 Dynamique

Cette section est techniquement un peu plus difficile, mais on peut la résumer en quelques lignes pour ceux qui ne veulent pas se plonger dans les détails mathématiques. Jusqu'à maintenant nous avons surtout parlé de cinématique, c'est à dire que nous avons expliqué comment décrire des mouvements dans l'espace de Minkowski de manière cohérente avec les prescriptions de la relativité restreinte. Nous n'avons cependant pas expliqué comment relier ces mouvements aux causes, c'est à dire aux forces. La procédure est assez simple conceptuellement mais devient un tout petit peu plus compliquée techniquement. Il y a essentiellement deux manières de faire. On peut soit redéfinir les notions de forces et d'accélération directement dans le cadre minkowskien, soit se raccrocher à la mécanique Newtonienne en utilisant la notion de référentiel tangent. La première méthode peut paraître très axiomatique et technique mais à l'avantage de réutiliser l'espace de Minkowski, la seconde est un peu plus simple à comprendre (bien qu'un peu ad-hoc). On va d'abord expliquer la seconde méthode de manière très heuristique et on déroulera ensuite le formalisme un peu plus technique pour la première. Le contenu de ces notes reste dans les deux cas très approximatif et il faut nécessairement se reporter à un cours plus complet de relativité restreinte (par exemple [3]) pour être capable de traiter toutes les situations.

2.1 La méthode du référentiel tangent

L'idée que l'on va utiliser est que la mécanique newtonienne reste valable pour des vitesses faibles. Pour calculer la trajectoire d'un point matériel on peut donc choisir de se placer dans le référentiel dans lequel cet objet est au repos. Ensuite on regarde avec le principe fondamental de la dynamique comment sa vitesse est modifiée de manière infinitésimale par l'application d'une force (que l'on suppose donnée) pendant un instant très court. La durée étant infinitésimale, la mécanique newtonnienne doit être presque exactement bonne (et même exacte à la limite). Un instant plus tard le point matériel a acquis par cette procédure une petite vitesse. On change alors de référentiel à l'aide des transformations de Lorentz pour se placer dans un nouveau référentiel dans lequel le point matériel est localement immobile. On réitère alors la procédure précédente indéfiniment jusqu'à ce que la somme des petits intervalles de temps nous amène au temps qui nous intéresse. On obtient ainsi une suite d'évolutions-transformations de Lorentz. Dans la limite où cette procédure est réalisée avec des intervalles de temps très courts, on obtient exactement la bonne trajectoire relativiste. On se doute bien que l'on peut rendre cette méthode beaucoup plus rigoureuse et surtout continue (sans itération) grâce au calcul différentiel mais cela demande un peu plus de technique. Le référentiel qui suit le mobile et dans lequel il est localement au repos s'appelle alors le référentiel tangent. Si on sent bien qu'il peut être un peu technique de définir mathématiquement cette procédure à la limite, on comprend bien que la dynamique relativiste est en fait essentiellement la même (localement) que la dynamique newtonnienne, la différence fondamentale venant principalement de la cinématique.

2.2 Quadrivecteurs

Maintenant que nous avons défini l'espace de Minkowski il est tentant de l'utiliser pour définir un analogue de la vitesse en 4 dimensions. Ce que l'on va faire va rester assez formel, l'objectif est simplement de donner une idée des objets que manipulent les physiciens.

Définition 1 (Quadrivitesse)**.** Le vecteur quadrivitesse d'un point matériel M repéré par des coordonnées (ct,x,y,z) dans l'espace temps de Minkowski est vecteur contenant les dérivées de ces coordonnées en fonction du temps propre.

$$\mathbf{v} = \frac{d\vec{OM}}{d\tau} = \begin{pmatrix} c\frac{dt}{d\tau} \\ \frac{dx}{d\tau} \\ \frac{dy}{d\tau} \\ \frac{dz}{d\tau} \end{pmatrix}$$

La quadrivitesse ressemble ainsi à la vitesse usuelle à la différence près que l'on dérive par rapport au temps propre qui est un paramètre plus objectif que le temps coordonnée. Ensuite, comme le temps coordonnée n'est pas le temps propre on le dérive aussi (et on le multiplie par c pour être homogène) pour avoir un vecteur à 4 composantes qui vit bien dans l'espace-temps et pas juste dans l'espace. L'interprétation de cette première coordonnées de la quadrivitesse est un peu inhabituelle. Il s'agit du taux auquel on avance dans le temps coordonnée à mesure que le temps propre s'écoule (multiplié par c pour en faire une vitesse). Cette première coordonnées encode ainsi en quelque sorte la dilatation du temps. En notant $\vec{v}$ la (tri)vitesse usuelle, c'est à dire le vecteur contenant les dérivées de x, y z et t en fonction du temps coordonnée (et pas du temps propre !), on peut montrer en utilisant l'expression du temps propre et après quelques calculs pénibles que la quadrivitesse s'exprime en fonction de la (tri)vitesse de la manière suivante :

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

On définit ensuite le *quadrivecteur énergie-impulsion* (ou quadri quantité de mouvement) comme la masse multipliée par la quadrivitesse. De même qu'en mécanique classique, la quadri énergie-impulsion se conserve pour un système isolé et on appelle alors *quadriforce* la variation de cette quantité lorsque le système n'est plus isolé. On a ainsi les deux définitions suivantes :

Définition 2 (Quadrivecteur énergie-impulsion)**.**

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Définition 3 (Quadriforce)**.**

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{v})$$

La dépendance explicite en la quadrivitesse est obligatoire à cause des transformations de Lorentz. Il s'agit des lois de la mécanique en terme de forces. Peut-on les exprimer avec l'énergie ? La magie de la relativité restreinte, qui est en cela presque plus pure que la mécanique classique, c'est que c'est déjà fait et que la formulation des lois en terme d'énergie est déjà contenu dans cette équation. En effet, en relativité restreinte l'énergie d'une particule est simplement la première composante de son quadrivecteur énergie-impulsion (d'où le nom !). L'équation précédente restreinte à la première composante dit ainsi que la variation de l'énergie d'un point matériel le long de sa ligne d'univers est égale à la puissance des forces qui s'appliquent sur ce point. On va évidemment un peu vite ici, pour plus de détails on peut aller voir [3] ou à la rigueur [2]. On peut tout de même donner la formule pour l'énergie d'une particule isolée (la première composante de l'énergie impulsion) :

Définition 4 (Énergie)**.**

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Attention ici v est toujours la norme de la vitesse usuelle (tri vitesse). Pour une vitesse nulle, une particule a toujours de l'énergie, qu'on appelle énergie de masse. Dans ce cas

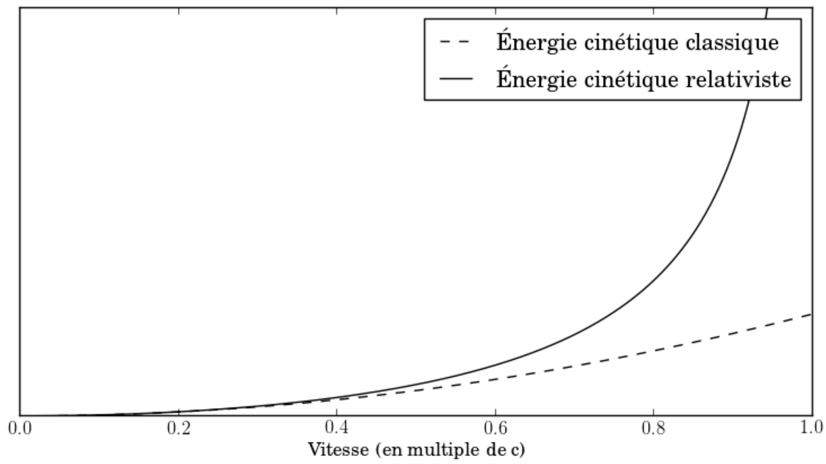

FIGURE 10 – Comparaison entre l'énergie cinétique en mécanique classique et en relativité restreinte.

on obtient la formule la plus célèbre de la physique : $E = mc^2$! [8] Pour des vitesses faibles la formule précédente redonne approximativement [9] la mécanique classique :

$$E \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \text{autres termes qui sont petits lorsque } v \text{ est petit}$$

Néanmoins, l'énergie relativiste grandit beaucoup plus vite pour des vitesses proches de celle de la lumière. La différence fondamentale entre l'énergie cinétique relativiste (c'est à dire l'énergie relativiste moins l'énergie de masse) et l'énergie cinétique classique, c'est que la première explose (voir Fig 10) à mesure que l'on s'approche de la vitesse de la lumière ce qui explique encore une fois pourquoi on ne peut pas la dépasser (il faudrait fournir une puissance supérieure à l'infini).

3 Application : le voyage spatial

3.1 Les limites théoriques dues à la relativité

Commençons par deux questions. On imagine un monde où l'on n'a absolument aucune limite technique ou physiologique (mais tout de même une espérance de vie standard) et on suppose que l'on n'est contraint que par les lois de la physique. J'aimerais visiter une étoile se trouvant à 1000 années lumières de la terre :
- Puis-je faire l'aller retour me séparant de cette étoile et revenir sur Terre avant de mourir ?
- Puis-je le faire (éventuellement mort) avant que mes amis restés sur terre, eux, ne le soient ?

La relativité nous dit que rien ne peut aller plus vite que la lumière, on a donc envie de répondre que la réponse à ces deux questions est négative, on a l'impression qu'il nous faut au minimum 1000 ans pour arriver sur cette étoile (et beaucoup de physiciens ont tendance à répondre la même chose sans réfléchir). Il faut se souvenir qu'on peut toujours relier deux points de l'espace avec une ligne d'univers ayant un temps propre aussi court que l'on veut. Il suffit pour cela de se rapprocher autant que possible de la vitesse de la lumière (par rapport au référentiel dans lequel la terre comme l'étoile sont à peu près au repos). Rien n'interdit donc en relativité restreinte d'aller à une étoile située

8. On voit que c'est loin d'être une équation qui résume le contenu de la relativité...
9. Ceux qui savent ce que ça veut dire peuvent faire le développement de Taylor de l'équation précédente)

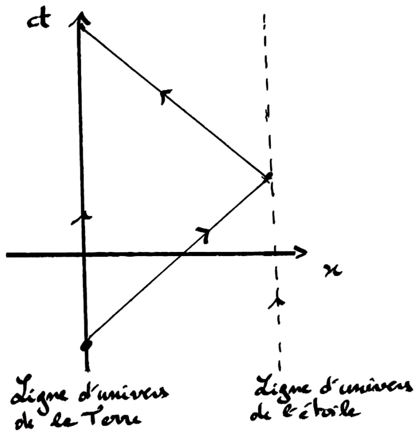

FIGURE 11 – Lignes d'univers de la Terre, de l'étoile et du vaisseau qui fait la navette entre les deux..

à 1000 années lumières de la Terre alors que l'on a seulement, au maximum, une centaine d'années à vivre !

Le sort des amis sur Terre va poser plus de problèmes. Eux restent synchronisés avec le temps coordonnée du référentiel de la Terre et vont donc devoir attendre au moins 2000 ans que je sois rentré. Sauf miracle de la médecine, ils ont peu de chances de survivre. On se rend compte avec cet exemple que la relativité restreinte permet en fait une sorte de voyage dans le futur [10].

3.2 Les limites pratiques

Outre la difficulté énergétique qu'il y a à propulser un vaisseau à une vitesse arbitrairement élevée, il y a un autre problème plus physiologique qui empêche (a priori) d'aller aussi loin que l'on veut : le corps humain ne supporte qu'une accélération finie. Une accélération de $1g$ correspond à l'accélération qui nous donne l'impression d'être soumis à la pesanteur terrestre. Au dessus de quelques g on se sent écrasé et on perd rapidement connaissance. On peut donc raisonnablement considérer que $1g$ est une accélération maximum acceptable pour un voyage spatial de longue durée (accélération qui a l'avantage de donner aux passagers l'impression d'être sur terre). Ensuite il faut résoudre les équations [11] de la dynamique dans le cadre de la relativité restreinte. C'est ce qu'on appelle le problème du mouvement uniformément accéléré.

On peut calculer le temps propre τ dans le vaisseau en fonction de la distance parcourue d dans le référentiel de la terre pour une accélération constante a. On peut soit utiliser la méthode du référentiel tangent dans lequel la force (classique) est constante, soit directement en intégrant les équations du mouvement reliant la quadriaccélération et une quadriforce. Il faut ensuite résoudre des équations un peu pénibles (mais c'est largement faisable, voir [3]. On trouve :

$$\tau = \frac{c}{a} \cosh^{-1}\left(ad/c^2 + 1\right)$$

10. La relativité permet de voyager dans le futur en ralentissant l'écoulement du temps d'un observateur en mouvement (et donc en accélérant comparativement le temps de ce qu'il y a autour de lui). La relativité interdit cependant d'en revenir, le temps ne s'écoule que dans un sens.

11. On peut trouver plus de détails sur les équations relativistes du voyage spatial dans un court article de Peter Gibbs hébergé sur la page de John Baez `http://math.ucr.edu/home/baez/physics/Relativity/SR/rocket.html`. Plus généralement les articles de *The Original Usenet Physics FAQ* sur la relativité restreinte (special relativity)[1] répondent aux questions qui sont le plus souvent posées sur la relativité restreinte.

Ou réciproquement :

$$d = \frac{c^2}{a}\left(\cosh\frac{a\tau}{c} - 1\right)$$

Où le cosinus hyperbolique est défini à partir de la fonction exponentielle de la manière suivante :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

L'application numérique fournit le tableau suivant :

τ (en années)	d (en années lumières)
1	0.56
2	2.90
5	82.7
8	1 839
12	113 242

Pour des distances supérieures à quelques millions d'années lumières, il faut prendre en compte les effet de relativité générale et l'expansion de l'univers (sujet qu'on a évoqué au cours précédent). Évidemment on n'a pas pris en compte l'énergie folle qu'il faudrait fournir pour aller aussi vite, mais il est intéressant de voir que l'on peut facilement (au moins théoriquement) aller à n'importe quel endroit de l'univers observable (qui fait à peu près 50 milliards d'années lumières de rayon) le tout dans une vie humaine (et même en 20 ans) car la croissance de d en fonction de τ est grosso modo exponentielle.

Question idiotes

1. Je suis dans un TGV lancé à 0.5 fois la vitesse de la lumière, est-ce que je me sens comprimé ?
2. Est-ce que l'on peut «voir» la contraction des distances ? Par exemple, si je prends en photo un objet bougeant très vite, est-ce que je vois cette contraction ? [Attention, pour répondre correctement, il faut préciser comment on prend la photo. Le mieux est de considérer la situation la plus simple et la plus symétrique possible.]

Exercice 1 : Le paradoxe du vaisseau de Bell

On considère deux fusées au repos reliées par une corde tendue. Les deux fusées accélèrent progressivement en suivant la même trajectoire à quelques mètres de distance, i.e. en gardant un écart entre elles constant dans le référentiel de la Terre. Que se passe-t-il pour la corde ? Finit-elle par se briser ? Faire un dessin.

Exercice 2 : Imagination

Les effets relativistes constituent un outil à mon avis largement sous exploité en littérature et au cinéma [12]. Il serait intéressant d'imaginer ce qui se passerait dans un monde où les vitesses élevées sont facilement accessibles (ce qui sera peut-être possible dans un futur proche au contraire du voyage dans le passé). N'importe qui pourrait choisir de se désynchroniser du temps terrestre. Un vieil homme malade pourrait choisir de passer les nuits du dernier mois de sa vie à dormir dans un vaisseau lancé à une vitesse telle que le temps s'écoule 730 fois moins vite que sur Terre. Il pourrait ainsi passer 30 Noël de suite avec ses petits enfants, il les verrait grandir et aurait l'impression de ne jamais les quitter.

12. À l'exception peut être d'*Interstellar* qui a le défaut d'utiliser un effet de relativité générale plus difficilement compréhensible et de contenir énormément de folklore physiquement douteux (il se passe des choses bien bizarres avec les dimensions cachées, les trous de ver et les trous noirs).

Dans un tel monde, les humains ne seraient-ils pas tentés de s'abandonner à une fuite en avant, de se désynchroniser en attendant un monde meilleur ? À l'approche de la mort, ne serait-on pas tenté de faire comme le vieil homme malade et de ralentir notre temps, pour voir un peu du monde qui vient ? Comment le couple, la famille, l'amitié, évoluent-ils dans un monde où les expériences sont aussi différentes ?

Il semble qu'il y ait quelque chose de tragique et de poétique dans l'impact de ce temps flexible sur la société. Réfléchir à une nouvelle (une page ou deux) sur le sujet, permet –au delà de l'intérêt littéraire dont il est possible que je sois le seul à être convaincu– d'être sûr que l'on a bien compris les subtilités de l'écoulement du temps.

Références

[1] The Original Usenet Physics FAQ. http ://math.ucr.edu/home/baez/physics/index.html, 2014.

[2] Eric Gourgoulhon. *Relativité restreinte : Des particules à l'astrophysique.* EDP sciences, 2012.

[3] David Langlois. Introduction à la relativité. *Ecole polytechnique*, 2008.