Physique pour tous

Cours 6 : *Trous noirs*

Antoine Bourget [*] [†]

Résumé

Notes provisoires du cours sur les trous noirs. Seule la section sur la métrique est actuellement disponible.

1 La métrique de Schwarzschild

1.1 Considérations générales sur la métrique

On considère un objet massif, de masse M, sphérique, de rayon R, seul dans l'univers et immobile [1]. Nous avons dit que la répartition de matière détermine la géométrie de l'espace-temps [2], donc cet objet doit influencer l'espace-temps autour de lui. Nous allons maintenant décrire de quelle façon tout cela se passe. Choisissons un système de coordonnées comme précédemment, avec une coordonnée temporelle t et une coordonnée radiale r. Nous restons pour l'instant assez imprécis sur leur définition précise, tout deviendra clair par la suite.

Afin d'éviter toute complication technique, et étant donné que nous n'avons pas les équations d'Einstein dans notre boîte à outils, nous allons admettre l'expression de la métrique dans l'espace-temps autour de l'astre décrit ci-dessus. Voici le résultat des calculs : La métrique est donnée, à l'extérieur de l'astre, c'est-à-dire pour $r > R$, par

$$d_S^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 \Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1 - \frac{r_S}{r}}, \qquad \text{avec} \qquad r_S = \frac{2GM}{c^2}. \tag{1}$$

Voyons ce que nous pouvons dire de cet espace-temps. Quand nous sommes loin de l'origine, r est très grand [3]. Dans ce cas, on peut négliger la quantité $\frac{r_S}{r}$ qui est très petite devant 1. Par conséquent, $d_S^2 \cong c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$, c'est la métrique de Minkowski ! Ainsi, loin de $r = 0$, tout se passe comme si l'espace-temps était vide, ce qui est rassurant (il serait embêtant qu'un "objet" situé quelque part dans l'univers puisse avoir une influence notable même à une distance très grande). Une personne très éloignée, appelons-là Juliette, pourrait donc croire qu'elle est dans un espace vide, dans lequel la relativité restreinte s'applique. Cela est bien pratique, car on peut alors définir un référentiel associé à Juliette, et donc une notion de temps et d'espace. Si Juliette est au repos (c'est-à-dire qu'elle est à r constant), son temps propre est identifié à t. Ce long laïus permet donc de donner une définition précise aux coordonnées r et t introduites plus haut : *ce sont les coordonnées d'espace et de temps tels que perçus par un observateur très éloigné et au repos par rapport à l'astre.*

---

[*] Laboratoire de Physique Théorique, École Normale Supérieure, Paris

[†] contact : `bourget@lpt.ens.fr`

1. dans un référentiel galiléen tel que le centre de masse de l'objet soit immobile dans ce référentiel
2. Souvenons-nous du cours de cosmologie, dans lequel la liste des composants de l'univers nous avait permis de connaître son évolution grâce aux équations d'Einstein, et d'en déduire la théorie du Big Bang.
3. Quand on veut dire qu'une grandeur dimensionnée (c'est-à-dire qui a une unité) est gande ou petite, il faut toujours la comparer à une autre grandeur, de référence, qui a la même unité. Ici, c'est naturellement r_S : quand nous dirons que r est grand ou petit, ce sera toujours par rapport à r_S.

1.2 Les effets relativistes deviennent importants

Approchons-nous maintenant de cet objet, en faisant petit à petit diminuer r. Lorsque celui-ci vaut, par exemple, environ 10 fois r_S, on a $1-\frac{r_S}{r}=0,9$, et donc $d_S^2 \cong 0,9c^2\Delta t^2 - 1,1\Delta x^2$. Qu'est-ce que cela signifie ? Imaginons que Roméo soit immobile en $r = 10r_S$ et envoie des SMS à Alice de façon régulière : pour fixer les idées, disons qu'il est très amoureux et en envoie un par seconde. Il regarde donc sa montre, et à chaque fois que la trotteuse avance, il envoie un SMS. C'est donc son temps propre qui rythme les messages qu'il envoie :

$$1 \text{ seconde} = \Delta\tau \cong \frac{d_S}{c} \cong 0,9\Delta t$$

Admettons pour le moment que rien d'intéressant ne se produit au cours de la propagation du message entre Roméo et Juliette [4]. Du point de vue de Juliette, dont le temps propre est t (souvenez-vous, j'ai insisté lourdement !), les SMS arrivent séparés d'un intervalle de temps

$$\Delta t \cong \frac{\Delta\tau}{0,9} \cong 1,1\Delta\tau = 1,1 \text{ seconde}$$

Autrement dit, le rythme est plus lent ! Mais il ne s'agit pas seulement du rythme de réception des SMS : imaginez que Juliette ait gardé le contact visuel avec Roméo (au moyen d'une lunette, par exemple, s'ils sont trop éloignés). Elle *voit* alors Roméo lui expédier les messages au rythme d'un toutes les 1,1 secondes. Ce sont donc tous ses mouvements qui sont ralentis. Ce phénomène est fondamental : schématiquement on peut dire que la masse de l'astre a déformé l'espace-temps autour de lui, de telle manière qu'un observateur éloigné voie les objets placés dans le champ gravitationnel au ralenti.

Peut-être trouvez-vous que Juliette aurait tort de s'alarmer pour un ralentissement aussi mineur ; après tout, elle peut se contenter d'un message toutes les 1,1 secondes. Mais souvenez-vous d'où vient cette valeur : pour une distance r quelconque, on aurait trouvé

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{1-\frac{r_S}{r}}.$$

Plus r est proche de r_S, plus le préfacteur grandit : pour $r = 1,001r_S$, on obtient $\Delta t \cong 1000\Delta\tau$, soit un SMS toutes les 17 minutes !

Le suspense est maintenant à son comble : que va-t-il se passer quand r atteindra r_S, voire deviendra plus petit que r_S ?

1.3 Gardons les pieds sur Terre

Avant de se demander ce qui se passe quand r devient plus petit que r_S, sommes-nous sûrs que cette question a un sens ? Rappelez-vous que la métrique que nous étudions n'est valable qu'à l'extérieur de l'astre central (que ce soit une planète, une étoile, ou n'importe quoi d'autre). Par conséquent, si le rayon de cet astre vaut, par exemple, $R = 100r_S$, alors les seules valeurs de r où la métrique donnée précédemment a un sens sont celles qui sont supérieures à $100r_S$. La question de savoir ce qui se passe à r_S perd alors beaucoup de son intérêt : comme ce lieu se situe à l'intérieur de l'objet, la métrique n'y est pas donnée par l'expression (1), et il ne se passe *a priori* rien de spécial à r_S.

Il est donc temps de comparer le rayon de différents astres, R, au rayon de Schwarzschild correspondant, r_S. Rappelons que ce dernier ne dépend que de la masse de l'astre.

Calcul classique du rayon de Schwarzschild On peut utiliser une approche énergétique classique. Une particule de masse m située sur la surface de l'astre possède une énergie potentielle gravitationnelle égale à

$$E_p = -G\frac{mM}{R}$$

4. Cela sera plus facile à suivre grâce aux diagrammes de Penrose, patientez un instant !

Si nous voulons éjecter cette particule hors de l'attraction gravitationnelle de l'astre, nous devons lui donner une certaine vitesse v telle que son énergie cinétique compense cette énergie gravitationnelle, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R} \geq 0 \qquad \text{ou encore} \qquad v \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

En admettant maintenant que rien ne va plus vite que la lumière, il faut que

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} \leq c \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad R \geq \frac{2GM}{c^2}$$

pour que la particule, quelle qu'elle soit, puisse s'échapper.

1.4 Rien ne va plus : le trou noir

Lorsque $r = r_S$, nous voyons qu'il y a un problème, la métrique devenant totalement dégénérée : le coefficient devant Δt^2 devient nul, tandis que le coefficient de Δx^2 est infini ! Il n'est donc pas facile d'interpréter ce qui se passe : que va-t-il arriver à Roméo à cet endroit ? Ce que l'on peut dire, c'est que les coordonnées de Juliette, restée loin de l'astre, n'ont plus vraiment de sens. Mais peut-être cela n'est-il pas si grave : il arrive qu'une surface parfaitement régulière semble avoir des problèmes lorsqu'elle est décrite par certaines coordonnées, ces problèmes étant alors des artefacts créés par ce mauvais choix de coordonnées, et pouvant être supprimés en choisissant des coordonnées plus adaptées. Des exemples simples de ce genre de situation apparaissent en cartographie, lorsque se pose le problème de choisir des coordonnées adaptées pour décrire la surface sphérique de la Terre sur une carte plane.

De même, nous voyons qu'il semble y avoir un problème en $r = 0$. Il nous faut vraiment développer des outils plus puissants pour comprendre ce qui se passe...

1.5 L'extension maximale

Le problème est illustré par la figure 1. J'y ai représenté les trajectoires des rayons lumineux dans la région de l'espace-temps $r > r_S$. Il y a naturellement deux types de rayons, ceux qui se propagent vers la droite, et ceux qui se propagent vers la gauche, puisque j'ai restreint mon espace à une seule dimension. Comme on le voit, si l'on se place à grande distance de notre astre (loin vers la droite), les trajectoires ressemblent beaucoup à des droites, inclinées de 45 degrés, comme dans l'espace de Minkowski duquel vous êtes maintenant des spécialistes. Cependant, quand on se rapproche de la zone critique $r = r_S$, les cônes de lumière deviennent plus étroits, les pentes sont plus fortes, et les rayons semblent s'accumuler au voisinage de la ligne $r = r_S$. Autrement dit, si l'on envoie un rayon lumineux depuis l'extérieur du trou noir vers l'intérieur, il commence par progresser "normalement", puis à l'approche de l'horizon, r diminue de plus en plus lentement. Si l'on définissait une vitesse *effective* de la lumière dans ce système de coordonnées par la formule classique $v = dr/dt$, on se rend compte que cette vitesse diminue et tend à s'annuler en $r = r_S$. Évidemment, je m'empresse de préciser que cette vitesse est fortement dépendante de notre choix de coordonnées, qu'elle n'a rien de physique, et que la lumière se propage toujours... à la vitesse de la lumière ! Le fait que l'espace-temps soit courbé est responsable de ce genre de difficultés, et on pourrait retrouver la vitesse correcte de propagation de notre rayon lumineux en prenant en compte la dilatation du temps et la contraction des longueurs induites par la masse de l'astre.

Une question vous brûle certainement les lèvres : que se passe-t-il de l'autre côté de l'horizon, dans la zone que j'ai laissée désespérément blanche ? Les équations permettent, si l'on utilise encore la métrique 1 pour $r < r_S$, de tracer là aussi les trajectoires des rayons lumineux. Le résultat est présenté sur la figure 2. Cependant, quel crédit doit-on accorder à ces calculs ? Comme on le voit sur la figure 1, il semble impossible à un rayon lumineux de franchir l'horizon. Évidemment, ceci est également le cas de n'importe quelle particule massive, dont je vous rappelle qu'elle doit à tout instant être dans son cône de lumière.

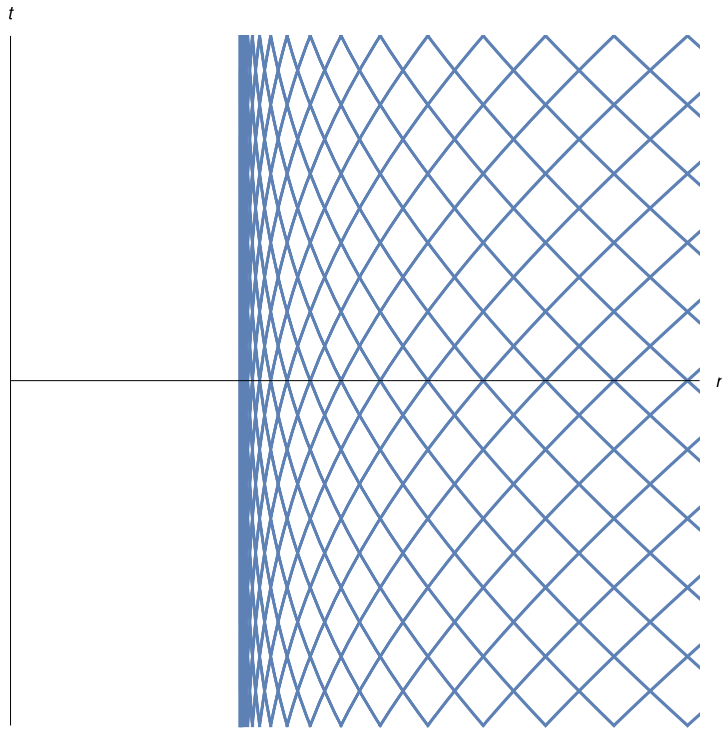

FIGURE 1 – Rayons lumineux dans les coordonnées (t, r)

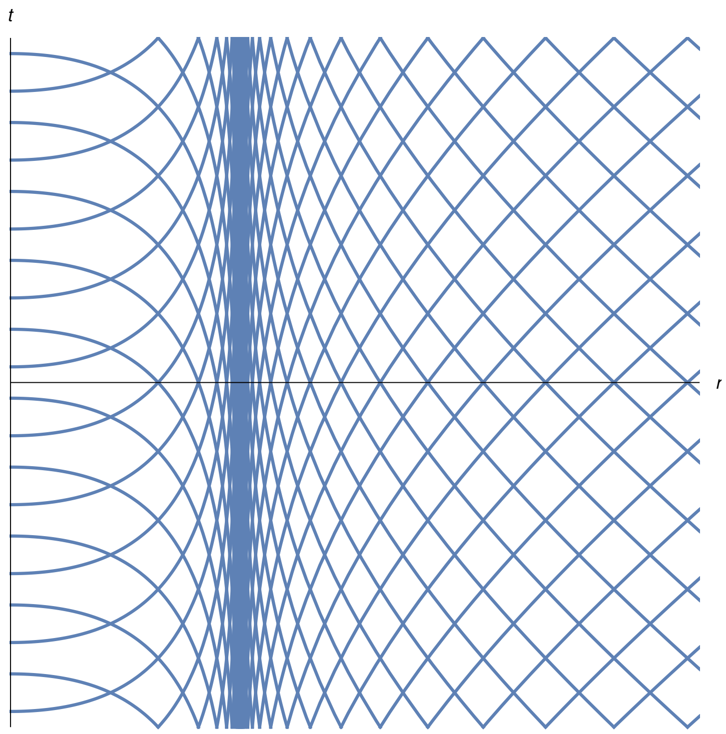

FIGURE 2 – Extension naïve de la figure 1

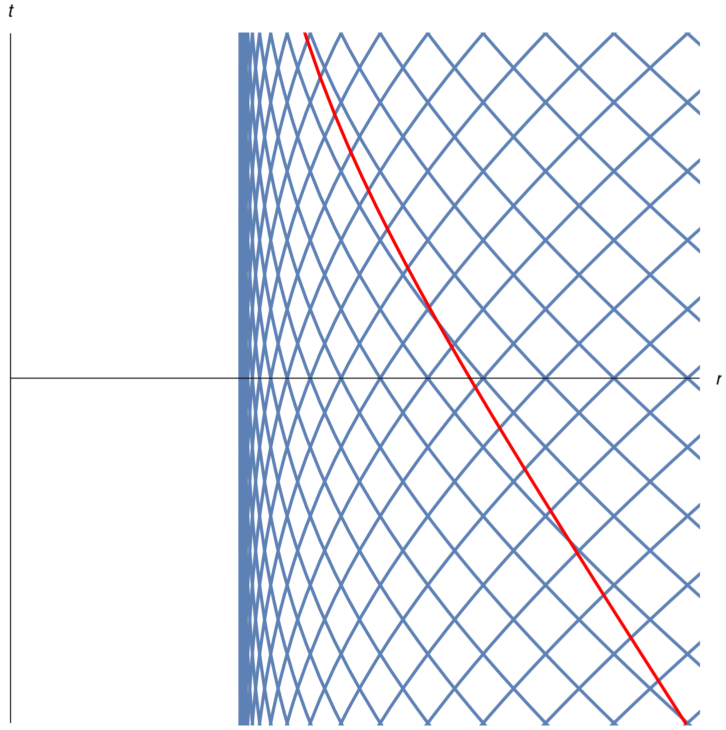

FIGURE 3 – Trajectoire d'une particule massive

Une trajectoire possible est tracée en rouge sur la figure 3, où il s'agit de la chute libre (par exemple, d'un observateur aventureux). Il semble qu'il soit impossible à l'observateur de franchir l'horizon : mais alors pourquoi dit-on que le trou noir "avale" tout, y compris la lumière ?

Pour comprendre cela, il faut garder à l'esprit que les coordonnées que nous avons choisies, r et t, sont certes adaptées à un observateur distant (puisqu'elles permettent d'obtenir la description habituelle de l'espace-temps de Minkowski très loin du trou noir) mais sans doute pas à l'observateur en chute libre. Nous allons essayer de remédier à cela, en effectuant divers changements de coordonnées. On peut bien sûr écrire des équations pour ces changements de coordonnées, mais il est plus parlant de procéder de façon visuelle, en partant de la figure 4, sur laquelle j'ai fait figurer les lignes de coordonnées de r et t en plus des rayons lumineux. Pour que tout soit clair, récapitulons :

— Les lignes bleues en trait plein sont les trajectoires des rayons lumineux qui se dirigent vers le trou noir, ou s'en éloignent.
— Les lignes en gros pointillés sont les lignes à r constant.
— Les lignes en petits pointillés sont les lignes à t constant.
— La ligne rouge est la trajectoire d'un observateur massif en chute libre.

L'idée est la suivante (regardez la figure 5) : on change la définition du temps de telle sorte que les rayons lumineux qui se dirigent vers le trou noir aient une vitesse apparente naïve égale à celle de la lumière. Autrement dit, on fait en sorte que si on utilise une déformation du temps t à la place de t en ordonnée, les rayons lumineux incidents sont des droites faisant un angle de 45 degrés avec la verticale. Comme on s'en rend compte en comparant avec la figure 1, la nouvelle coordonnée temporelle est proche de l'ancienne à grande distance de l'horizon, mais elle en est une déformation radicale à proximité de l'horizon. Mais voyons le bon côté : les rayons lumineux sont maintenant des droites, et on ne voit pas pourquoi on ne les prolongerait pas dans la région intérieure (figure 6). On peut même y ajouter la trajectoire de notre particule massive en chute libre.

Tout cela semble néanmoins bien artificiel. Pourquoi avoir choisi d'effectuer ce changement de coordonnée temporel plutôt qu'un autre ? Il y a tout de même une bonne raison : si l'on se remémore les cours de relativité restreinte, on se souvient d'y avoir appris que

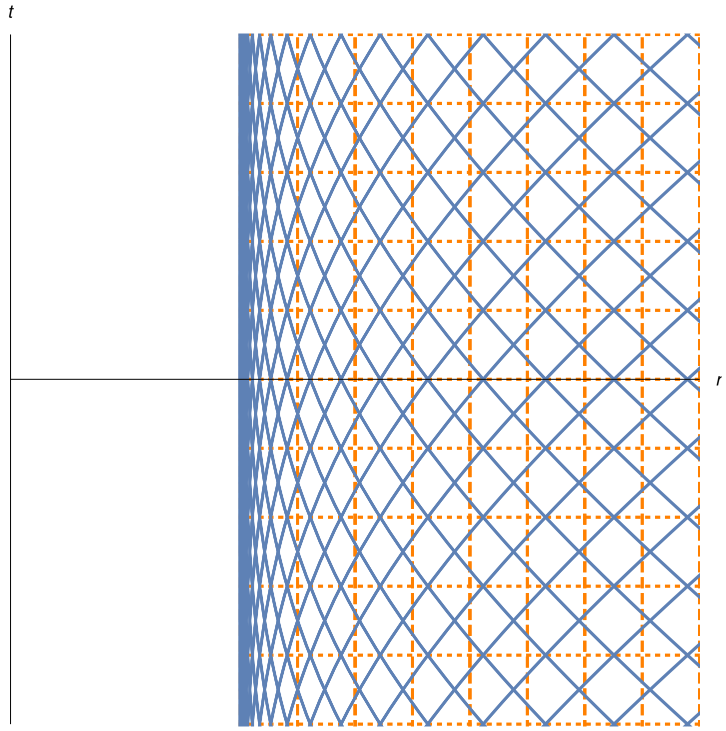

FIGURE 4 – En gros pointillés, les lignes à r constant, et en petits pointillés, les lignes à t constant.

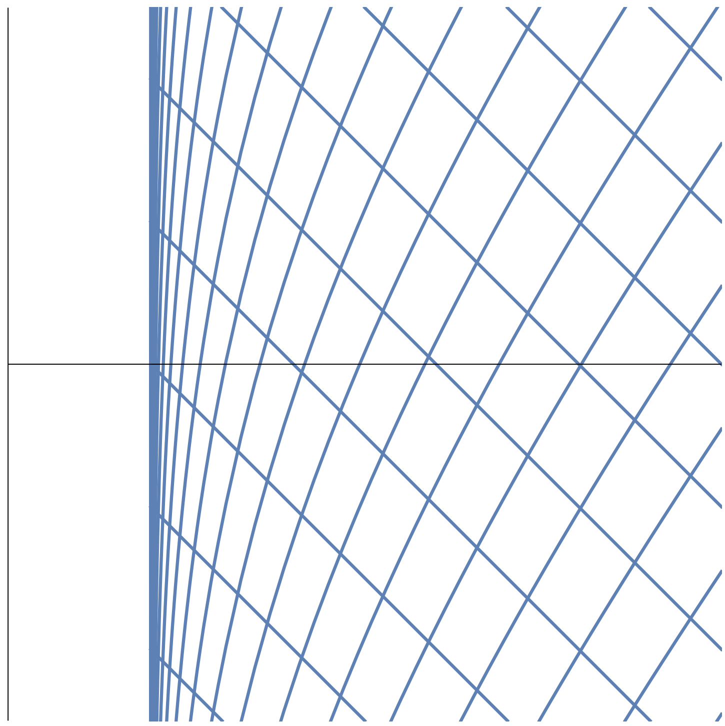

FIGURE 5 – Le même diagramme en coordonnées d'Eddington-Finkelstein avancées.

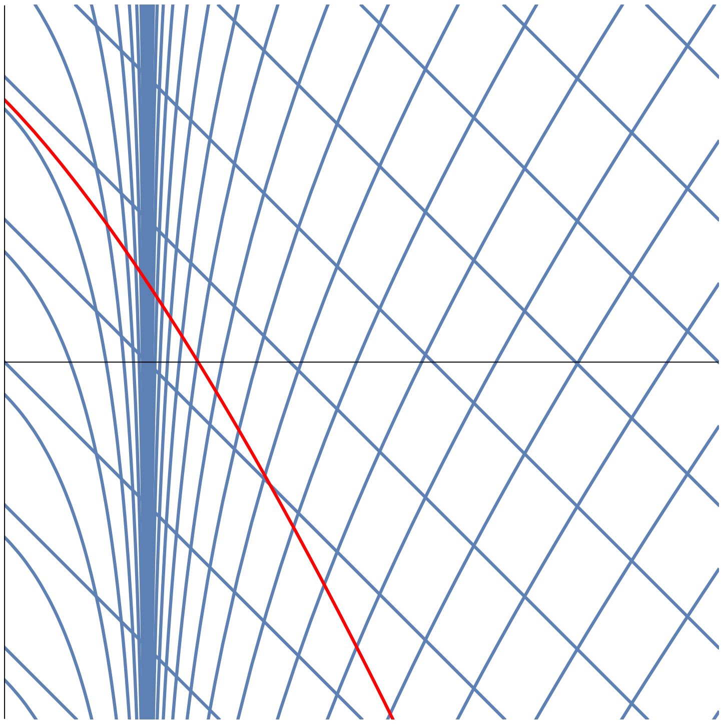

Figure 6 – Extension de la figure 5.

la trajectoire d'un rayon lumineux ne dépend pas du référentiel. Mieux, il s'agit d'un invariant fondamental qui permet de retrouver les propriétés d'un référentiel inertiel en translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel de base (par exemple celui de la Terre), étant données ces propriétés dans ce référentiel de base. L'analogue de cette démarche en relativité générale est précisément ce que nous sommes en train de faire. On ne peut pas parler de référentiels, mais on choisit un systèmes de coordonnées qui soit tel que la structure causale, c'est-à-dire les cônes de lumière, soient les plus réguliers possible. L'idéal serait que tous les rayons lumineux se propagent le long de droites penchées à 45 degrés. Sur la figure 6, c'est le cas des rayons incidents, mais pas des rayons qui s'éloignent du trou noir. On peut tenter d'effectuer une transformation analogue pour ces rayons, et obtenir la figure 7. Le fait que la particule massive semble partir à l'infini (temporel !) et revenir ensuite dans le passé montre bien que ces coordonnées ne sont pas adaptées à une particule (ou de la lumière) incidente.

L'idée est de combiner les deux transformations qui ont conduit aux figures 6 et 7. Le prix à payer est que l'horizon va s'enfuir à l'infini (vers la gauche) ! On comprend bien que cela est nécessaire, en regardant la figure 1. Cependant, on peut ensuite ramener cet horizon à distance finie au prix d'un abandon de la coordonnée r pour repérer les distances. On aboutit à une nouvelle coordonnée d'espace r' et une nouvelle coordonnée de temps t', qui sont telles que notre espace-temps a maintenant l'allure représentée en figure 8. Regardez bien cette figure, où on a fait figurer les lignes en pointillés décrites plus haut. Le point positif est que *tous* les rayons lumineux se propagent maintenant selon des droites à 45 degrés !

On peut alors suivre ce qui se passe sur l'*extension maximal* de cet espace-temps, qui est l'espace le plus grand qu'il est possible de construire à partir de l'espace que nous connaissons déjà (celui de la figure 8) et qui est tel que les rayons lumineux puissent se propager jusqu'à l'infini, ou jusqu'à une singularité.

1.6 Noir c'est noir

L'objet que nous décrivons depuis maintenant quelques temps est communément connu sous le nom de "trou noir". Pourquoi en est-il ainsi ? Cette question peut pa-

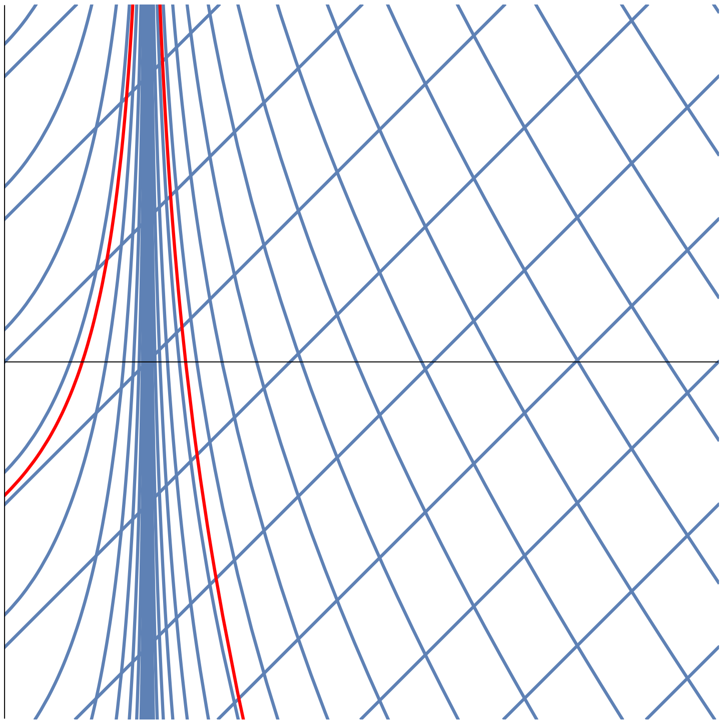

Figure 7 – Diagramme en coordonnées d'Eddington-Finkelstein retardées.

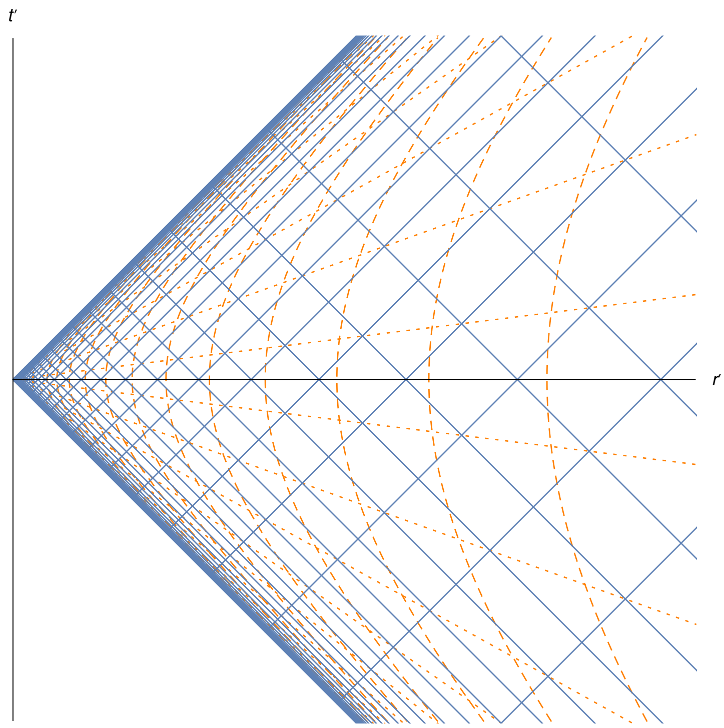

Figure 8 – Diagrammes utilisant les coordonnées t' et r'.

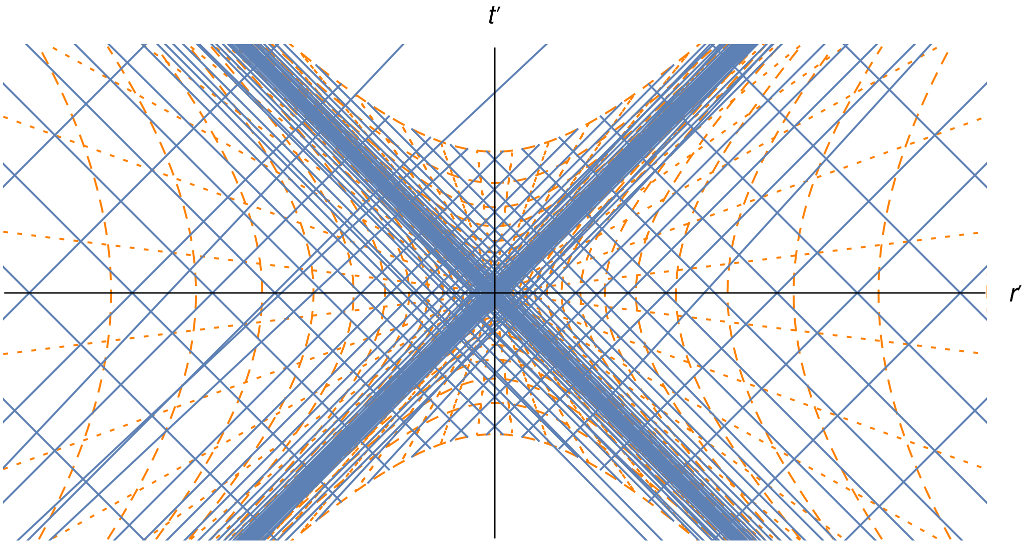

FIGURE 9 – Diagrammes maximal utilisant les coordonnées t' et r'.

raître ridiculement simple à ce point de l'exposé, mais pourtant, elle recèle des subtilités qui permettent, en les cernant, de mieux comprendre ce qu'est vraiment un trou noir. Considérons un rayon lumineux, que nous modéliserons par un rayon laser [5]. Pointons ce laser, depuis l'extérieur très lointain du trou noir en direction du centre. On se doute de ce qui va se produire : la lumière va se diriger vers le centre... et ne vas pas ressortir de l'autre côté !

Comment peut-on vérifier cela de façon rigoureuse ? Il suffit d'utiliser le diagramme de la figure 9, dans lequel les rayons lumineux ont le bon gout de se propager le long des diagonales !

Après tout, vous me direz que cela n'a rien de bien étonnant, si je dirige un laser sur la Terre, le Soleil ou la Lune, et que je place un observateur de l'autre côté, celui-ci ne verra pas non plus le faisceau. Mais il y a une différence de taille : dans le cas de la Terre, de la Lune ou du Soleil, la lumière a été arrêtée par la matière opaque qui compose ces astres. Si la Terre était soudainement changée en verre (en ne changeant rien à sa masse), alors le rayon lumineux entrerait et ressortirait indemne par le point antipodal. Dans le cas du trou noir, le matériau dont il est constitué est on ne peut plus transparent, puisque c'est uniquement du vide ! Rappelez-vous, la solution de Schwarzschild correspond à une masse centrale, ponctuelle, seule dans l'univers. Vous allez peut-être pinailler et me dire que cette masse centrale singulière est tout à fait susceptible d'être aussi opaque que la Terre. Soit, dans ce cas, il faut faire l'expérience suivante : diriger le laser dans le trou noir (c'est-à-dire à l'intérieur du rayon r_S) mais pas exactement vers le centre (voir les dessins), de sorte que la masse centrale soit évitée. Mais là, patatras, tout l'attirail que nous avons développé devient inutile : rappelez-vous que nous avons négligé deux des trois dimensions d'espace, pour ne garder que la dimension radiale. Or, si on ne pointe pas la lumière vers le centre, on utilise également une dimension angulaire. Autrement dit, hors les trajectoires purement radiales, point de salut, du moins avec le diagramme de Penrose établi précédemment.

5. Autrement dit, on néglige toute divergence du faisceau, ce qui est plus simple et plus conforme à l'idée que l'on a d'un rayon lumineux. Cela permet également de bien suivre la trajectoire qu'il emprunte. Le fait que la lumière soit monochromatique, c'est-à-dire composée d'une unique couleur extrêmement pure, permet en outre de bien visualiser certains autres effets intéressants.